



8-9 класс XXVIII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИПТОГРАФИИ
(сайт олимпиады www.cryptolymp.ru) 25.11.2018

1 вариант

1. Каждому набору $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (где $x_i \in \{0,1\}$) функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ставит в соответствие либо 0, либо 1. Условимся значения 0 и 1 называть *противоположными*. Известно, что если в произвольном наборе $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменить значение x_1 или x_5 на противоположное, то и соответствующее значение функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ изменится на противоположное. Последовательность x_1, x_2, \dots получена по правилу: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, $x_{k+5} = f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, x_{k+4})$, $k = 1, 2, \dots$ Найдите x_{14} , если известны первые 13 членов этой последовательности: 0000010110011. Ответ обоснуйте.

2. Для зашифрования слова из пяти букв каждая его буква заменяется на число согласно таблице.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| А | Б | В | Г | Д | Е,Ё | Ж | З | И | Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ъ | Ы | Ь | Э | Ю | Я |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |

Полученный набор чисел $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ затем преобразуется в набор $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ по следующему правилу. Сначала вычисляются вспомогательные числа $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$ по формулам

$$\bar{y}_0 = 2^0 \cdot x_0 + 2^4 \cdot x_1 + 2^3 \cdot x_2 + 2^2 \cdot x_3 + 2^1 \cdot x_4,$$

$$\bar{y}_k = (2^k \cdot x_0 + 2^{k-1} \cdot x_1 + \dots + 2^0 \cdot x_k) + (2^4 \cdot x_{k+1} + 2^3 \cdot x_{k+2} + \dots + 2^{k+1} \cdot x_4), \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\bar{y}_4 = 2^4 \cdot x_0 + 2^3 \cdot x_1 + 2^2 \cdot x_2 + 2^1 \cdot x_3 + 2^0 \cdot x_4.$$

А затем полагают y_k равным остатку от деления числа \bar{y}_k на 32. Расшифруйте исходное слово, если $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4) = (11, 27, 2, 16, 0)$.

3. В каждую клетку доски 4×4 Аня положила по несколько зерен и передала доску Боре (см. рис.). *Трансверсалью* доски называется набор из 4 клеток, любые две из которых расположены в разных строках и разных столбцах (см. примеры). Боря за один ход может снять одинаковое количество зерен с каждой клетки какой-либо одной трансверсали. За какое минимальное число ходов Боря может снять все зерна с доски?

Доска с зёрнами

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 2 | 5 |
| 4 | 5 | 4 | 2 |
| 2 | 1 | 5 | 7 |
| 8 | 2 | 4 | 1 |

Пример (серые клетки образуют трансверсаль)

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Пример (серые клетки **не** образуют трансверсаль)

| | | | |
|--|--|--|--|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

4. Ваня покрасил n точек числовой прямой с координатами $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + 2 = 3, \dots, a_n = a_{n-1} + n$ в белый цвет, а остальные точки из отрезка $[a_1, a_n]$ с целыми координатами – в синий. Какое максимальное количество отрезков разной длины, один из концов которого белый, а другой – синий, он сможет построить?

5. Для зашифрования слова каждая его буква заменяется на двузначное число согласно таблице.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|-----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|
| А | Б | В | Г | Д | Е,Ё | Ж | З | И,Й | К | Л | М | Н | О | П | Р | С | Т | У | Ф | Х | Ц | Ч | Ш | Щ | Ы | Ь,Ъ | Э | Ю | Я |
| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

Затем выбираются секретные ключи K_1, K_2 – натуральные числа от 1 до 9. С их помощью каждое двузначное число преобразуется так. Пусть A – первая цифра двузначного числа, B – его вторая цифра. Двузначное число (A, B) преобразуется в число (A_1, B_1) по формулам $A_1 = B$, $B_1 = r_{10}(A + K_1 \cdot B)$. Здесь $r_{10}(x)$ – остаток от деления числа x на 10. Затем число (A_1, B_1) преобразуется в число (A_2, B_2) по аналогичным формулам, но только вместо ключа K_1 используется ключ K_2 . Далее каждое исходное двузначное число (A, B) было заменено числом (A_2, B_2) . В результате получилось вот что: **59 28 77 64 95 64 90 41 64**. Восстановите исходное слово.

6. При входе в личный кабинет на терминале требуется ввести четырехзначный пароль из 0 и 1. Для этого на терминале имеются 4 кнопки и 4 окошка. При нажатии на кнопку в ей соответствующем окошке текущий символ заменяется на противоположный (то есть если в окошке сейчас горит цифра 1, то после нажатия на кнопку там будет 0, и наоборот). Сейчас во всех окошках выставлена 1. Какое наименьшее количество нажатий кнопок потребуется, чтобы перебрать все возможные варианты пароля?

